# Programme de colles n°19

semaine du 19 au 23 février

## Notions vues en cours

Chapitre 20 : Polynômes (Partie A) *(en complément de la semaine précédente)*

- Évaluation de $P$ en $\alpha \in \mathbb{K}$ notée $P(\alpha)$, composition de polynômes : définition, associativité, degré de $P \circ Q$
- Fonction polynômiale : définition, fonction associée à $P \in \mathbb{K}[X]$ notée $f_P \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, l'application $P \mapsto f_P$ est bijective et "compatible" avec les lois $+, \times, \lambda\cdot, \circ$ définies sur $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{K}[X]$
- Polynôme dérivé $P'$, compatibilité $(f_P)' = f_{P'}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, degré de $P'$, dérivées de $\lambda P + \mu Q$, de $PQ$ et de $P \circ Q$
- Dérivée $n$-ième de $P$, notation $P^{(k)}$, degré de $P^{(n)}$, dérivées $n$-ièmes de $\lambda P + \mu Q$, de $PQ$ et de $P \circ Q$
- Formule de Taylor, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$, injectivité de $P \mapsto f_P$

Chapitre 21 : Polynômes (Partie B)

- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, notation $B \mid A$, conséquences sur les degrés de $A$ et $B$
- La relation $\mid$ est réflexive et transitive, polynômes associés, équivalence avec $B \mid A$ et $A \mid B$
- Division euclidienne de $A$ par $B \neq 0$, on a $B \mid A$ si et seulement si le reste est nul, calcul pratique de division euclidienne
- $D \mid A$ et $D \mid B$ entraine que pour tous $U, V$ on a $D \mid AU + BV$ ; si $A \neq 0$, alors $AB \mid AC$ ssi $B \mid C$
- Un PGCD de deux polynômes (diviseur commun de degré maximal), ces PGCD sont associés deux à deux,
- Le PGCD de deux polynômes : c'est un PGCD unitaire, il est unique, notation $A \wedge B$
- Propriétés "classiques" du PGCD : $(\lambda A) \wedge (\mu B) = A \wedge B$ pour tous $\lambda, \mu$ non nuls, etc. Algorithme d'Euclide (y compris étendu), théorème de Bézout-Bachet, couple de coefficients de Bézout
- Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, $\dfrac{A}{A \wedge B}$ et $\dfrac{B}{A \wedge B}$ sont premiers entre eux
- Lemme de Gauss, $A \mid C$, $B \mid C$ et $A \wedge B = 1$ entraine $AB \mid C$ ; $A_1 \wedge B = A_2 \wedge B = 1 \implies (A_1 A_2) \wedge B = 1$
- PPCM de deux polynômes : définition, unicité notation $A \vee B$, propriétés classiques, le polynôme $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à $AB$
- PGCD d'un nombre fini de polynôme, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble / deux à deux, extension des théorèmes de Bézout et Bézout-Bachet
- Racine d'un polynôme, $P(\alpha) = 0$ ssi $X - \alpha \mid P$, extension avec un nombre fini de racines distinctes, un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus $n$ racines distinctes
- Multiplicité d'une racine, racine simple / multiple / double / triple, caractérisations de la multiplicité (minoration ou valeur exacte) avec divisibilité / factorisation / dérivées

## Questions de cours

*Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

- Formule de Taylor : on ne démontrera la formule que pour $\alpha = 0$ Chapitre 20, Théorème 20.33
- Théorème de la division euclidienne : énoncé, puis démonstration de l'unicité Chapitre 21, Théorème 21.4
- Montrer que $P(\alpha) = 0 \iff X - \alpha \mid P$, puis *sans démonstration* : donner 3 caractérisations des assertions "$\alpha$ est racine de $P$ de multiplicité $m$" puis "$\alpha$ est racine de $P$ de multiplicité au moins $m$" Chapitre 21, Propriété 21.25, Corollaires 21.31 et 21.32